Vektorrechnung

Ronny Harbich, 2003

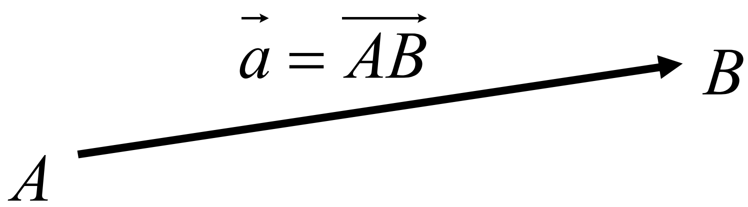
Einführung

Inhalt

- Definition
- Betrag
- Skalarmultiplikation
- Nullvektor
- Gegenvektor
- Einheitsvektor
- Addition
- Subtraktion
- Gesetze

Definition

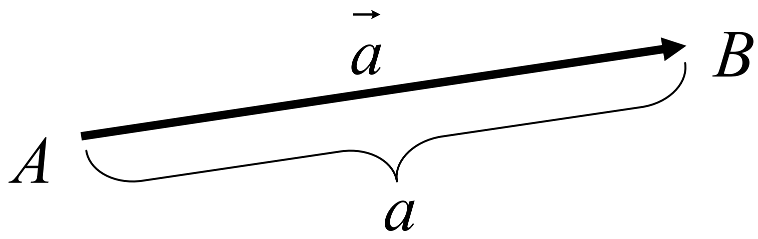
Ein Vektor ist eine Menge von Pfeile, die gleichlang (kongruent), zueinander parallel und gleichgerichtet sind. Ein einzelner Pfeil aus dieser Menge heißt Repräsentant des Vektors. Folglich ist eine Vektormenge (und somit auch die Anzahl ihrer Repräsentanten) unendlich groß.



Der Vektor, der von Punkt A nach Punkt B führt, wird mit Vektor AB bezeichnet, wobei A den Anfangs- und B den Endpunkt darstellt. Für einen Vektor benutzt man häufig kleine Buchstaben mit übergesetztem Pfeil (hier: a).

Betrag

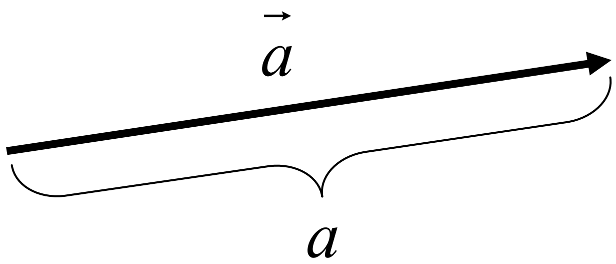
Der Betrag eines Vektors entspricht der Länge des zugehörigen Pfeils. Er ist somit eine nichtnegative reelle Zahl.

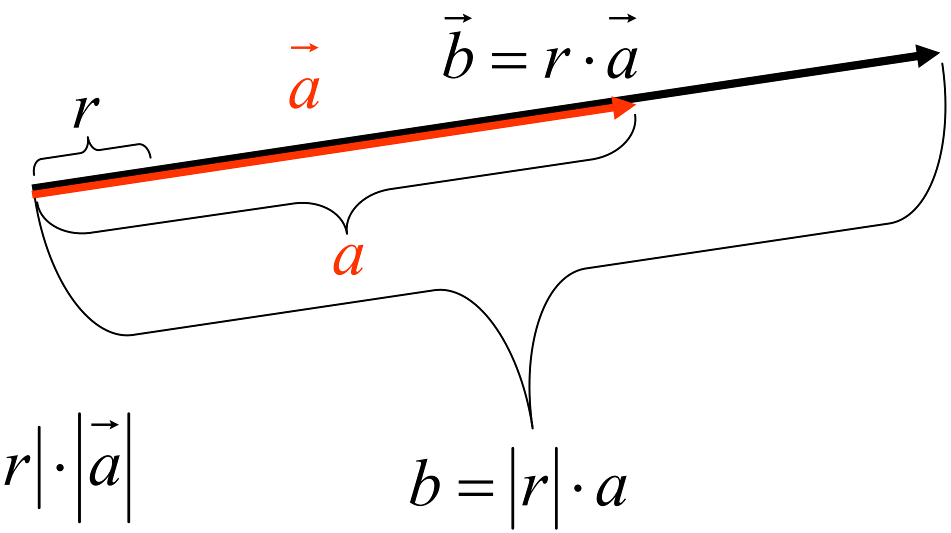


$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right| = a \quad \vec{a} \in V_n \wedge a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Skalarmultiplikation

Wird ein Vektor a, dessen Betrag größer 0 ist, mit einer reellen Zahl r multipliziert, so entsteht ein neuer Vektor b, welcher genau r-mal so lang ist wie Vektor a. Wenn r positiv ist, zeichnet sich Vektor b durch dieselbe Richtung wie Vektor a aus, ansonsten verhält sich seine Richtung Vektor a entgegengesetzt. Weiterhin ist Vektor b parallel zu Vektor a.





$$\vec{b} = r \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{b}\right| = b = |r| \cdot a = |r| \cdot \left|\vec{a}\right|$$

$$a, b, r \in \mathbb{R} \wedge \vec{a}, \vec{b} \in V_n \wedge \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Nullvektor

Ein Nullvektor ist ein Vektor mit dem Betrag 0 und unbestimmter Richtung.

$$\vec{o} = \overrightarrow{AA}$$

$$\left|\vec{o}\right| = \left|\overrightarrow{AA}\right| = 0$$

Wird ein Vektor a mit 0 skaliert, so ergibt sich immer ein Nullvektor.

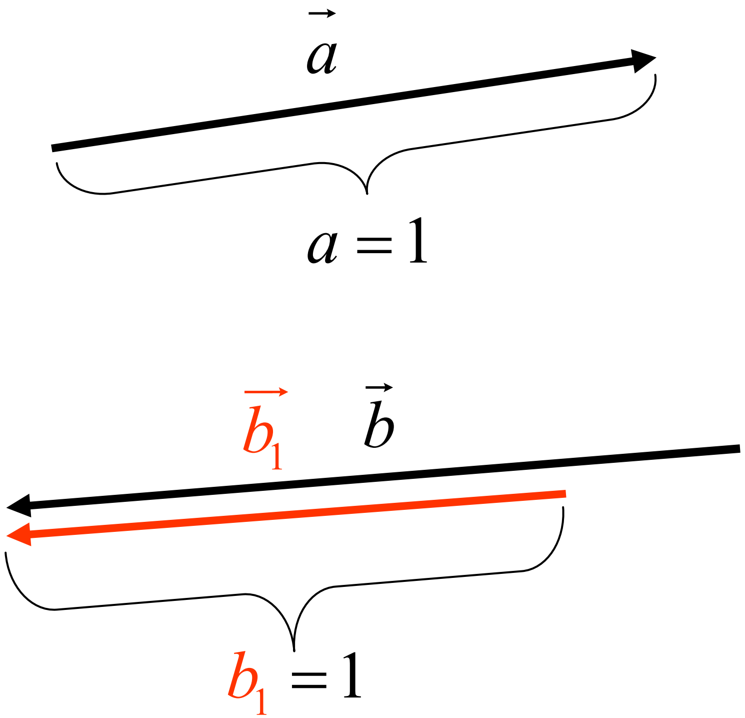
$$0 \cdot \vec{a} = \vec{o}$$

Wird ein Nullvektor mit einer reellen Zahl r skaliert, so ergibt sich wieder ein Nullvektor.

$$r \cdot \vec{o} = \vec{o} \quad r \in \mathbb{R}$$

Einheitsvektor

Einheitsvektoren sind Vektoren mit dem Betrag 1. Ein Vektor b skaliert mit dem Kehrwert seines Betrages ergibt immer den zugehörigen Einheitsvektor.



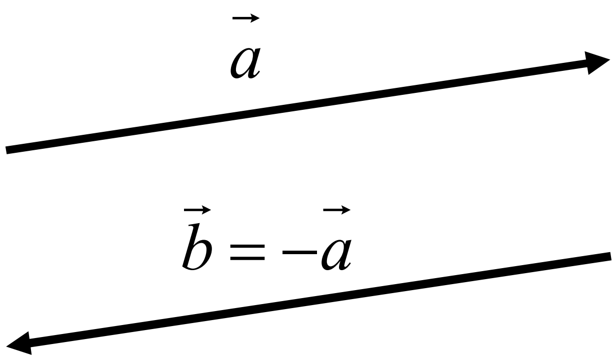
$$\left|\vec{a}\right| = 1$$

$$\vec{b_1} = \frac{1}{\left|\vec{b}\right|} \cdot \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{b_1}\right| = 1$$

$$\vec{a} \in V_n \wedge \vec{b} \in V_n \setminus \left\{\vec{o}\right\}$$

Gegenvektor

Gegenvektoren sind Vektoren mit gleichem Betrag und entgegengesetzter Richtung. Der zu einem Vektor a zugehörige Gegenvektor b entspricht der Skalierung von Vektor a mit -1.



$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$

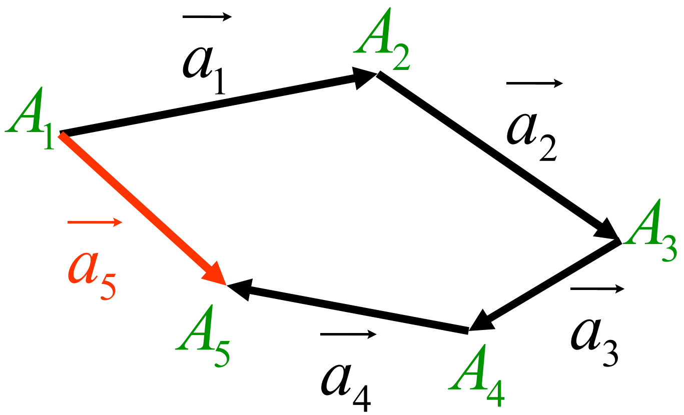
$$\vec{b} = -1 \cdot \vec{a} = \overrightarrow{BA}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \left|-1 \cdot \vec{a}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

$$\vec{a}, \vec{b} \in V_n \setminus \left\{\vec{o}\right\}$$

Addition

Vektoren werden mit einander addiert, indem jeweils der Endpunkt eines Vektors mit dem Anfangspunkt des folgenden Vektors verkettet wird. Der Summen-vektor entspricht nun dem Vektor zwischen Anfangspunkt des ersten und Endpunkt des letzten Vektors.



$$\overrightarrow{a_5} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}$$

$$\overrightarrow{a_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \ldots + \overrightarrow{a_n}$$

$$= \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1} A_n} = \overrightarrow{A_1 A_n}$$

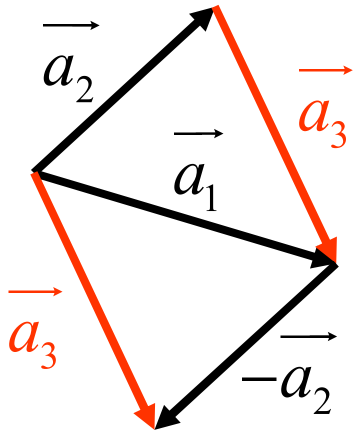
$$\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{o}$$

$$\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{a_{n+1}}, \overrightarrow{a_i}, \vec{a} \in V_n$$

Subtraktion

Vektoren werden mit einander subtrahiert, indem der Gegenvektor des zu subtrahierenden Vektors addiert wird.



$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$$

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \left(-\vec{a}_2\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_{n+1}} &= \vec{a}_1 + \sum_{i=2}^{n}\left(-\vec{a}_i\right) \\ &= \vec{a}_1 + \left(-\vec{a}_2\right) + \ldots + \left(-\vec{a}_n\right)\end{aligned}$$

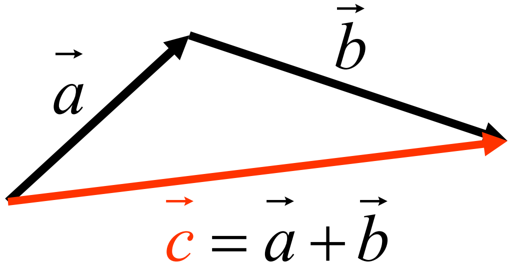
$$\overrightarrow{a_{n+1}}, \vec{a}_i \in V_n$$

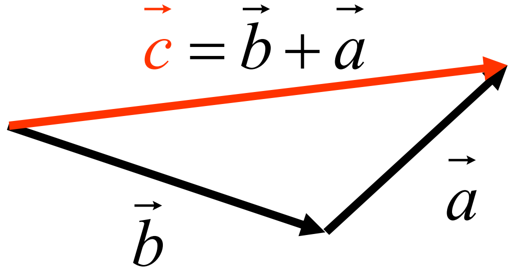
Gesetze

Kommutativgesetz (Addition):

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{a}, \vec{b} \in V_n$$

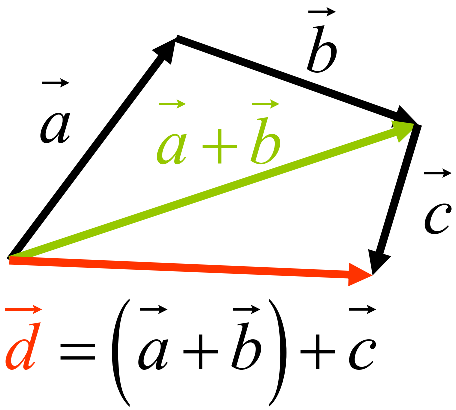


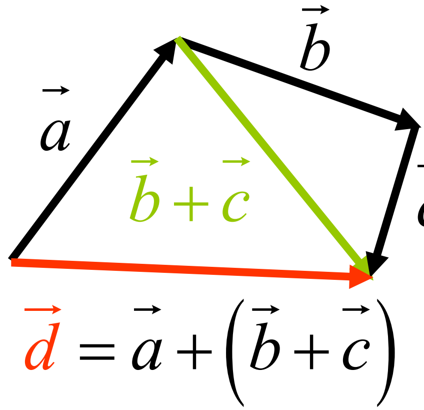


Assoziativgesetz (Addition):

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$$

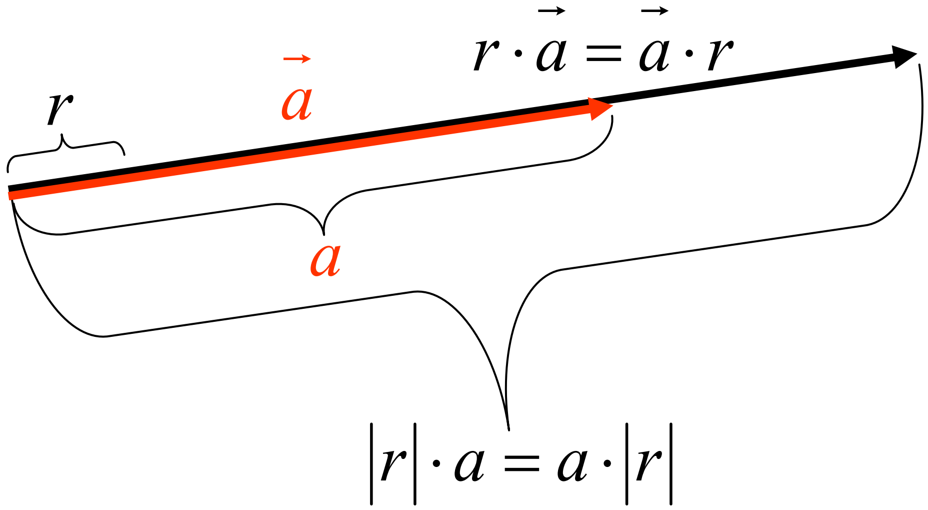




Kommutativgesetz (Multiplikation):

$$r \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot r$$

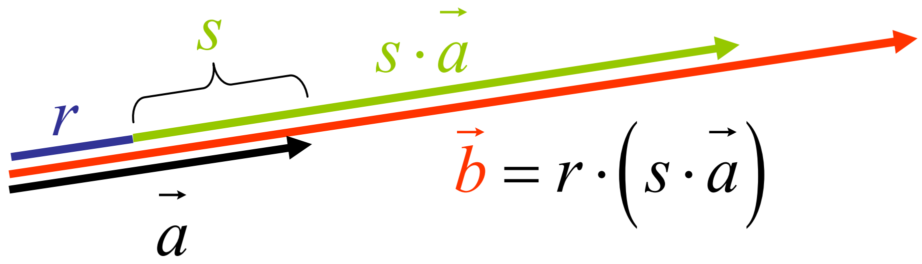
$$\vec{a} \in V_n \wedge r \in \mathbb{R}$$

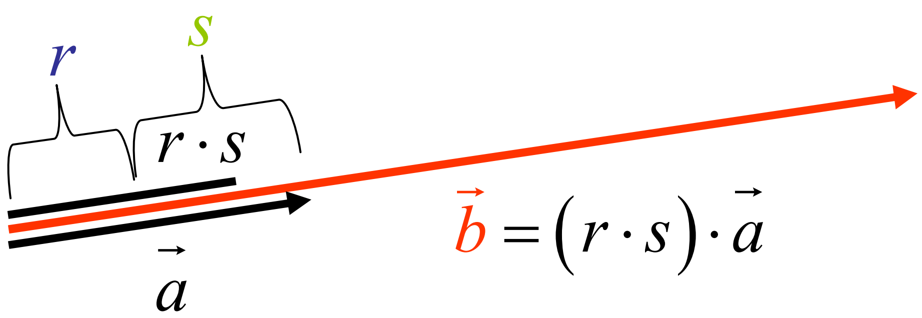


Assoziativgesetz (Multiplikation):

$$\vec{b} = r \cdot \left(s \cdot \vec{a}\right) = \left(r \cdot s\right) \cdot \vec{a}$$

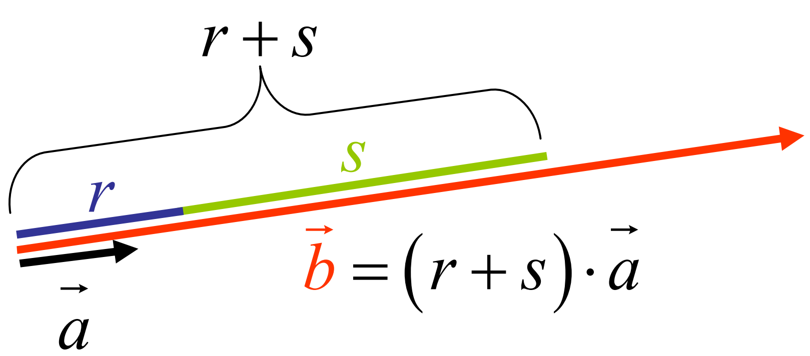
$$\vec{a}, \vec{b} \in V_n \wedge r, s \in \mathbb{R}$$

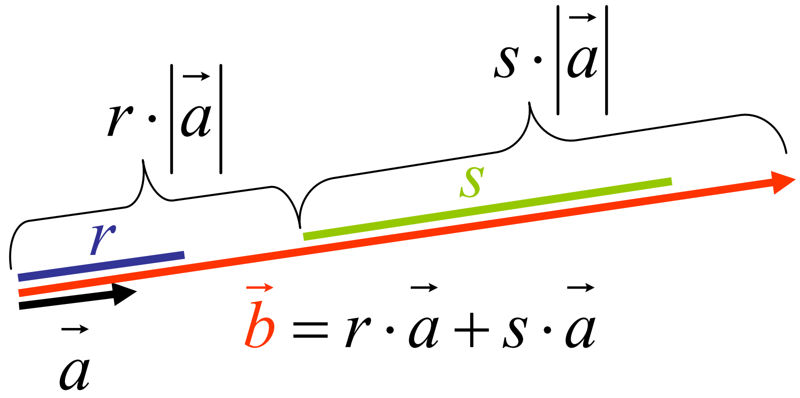




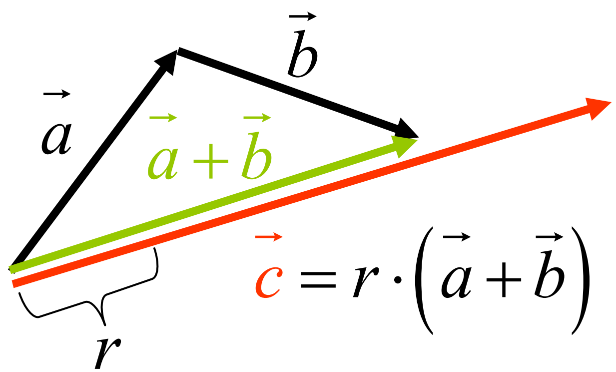
Distributivgesetze:

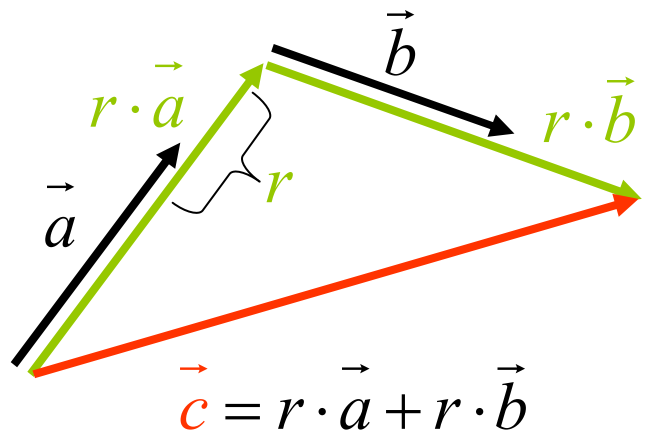
$$\left(r+s\right)\cdot\vec{a}=r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{a}\quad \vec{a}\in V_n\wedge r,s\in\mathbb{R}$$





$$r\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=r\cdot\vec{a}+r\cdot\vec{b}\quad \vec{a},\vec{b}\in V_n\wedge r\in\mathbb{R}$$





Vektoren im Raum

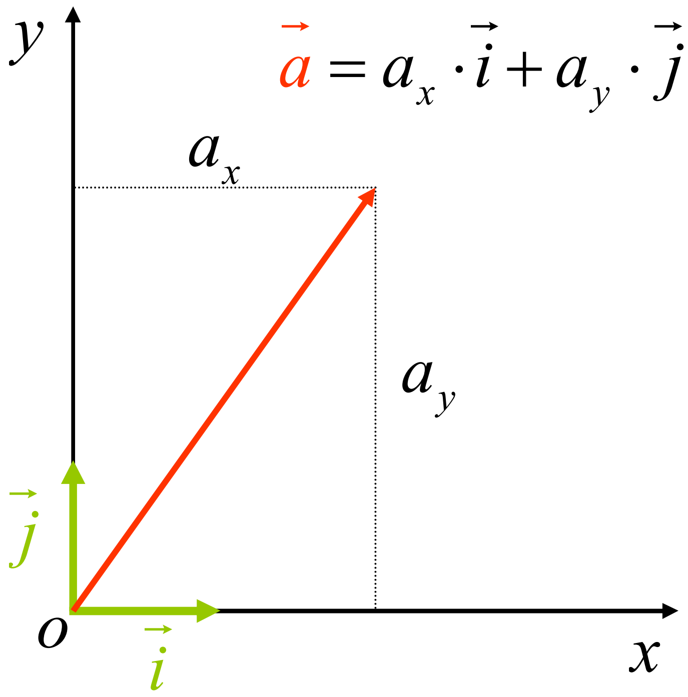
Inhalt

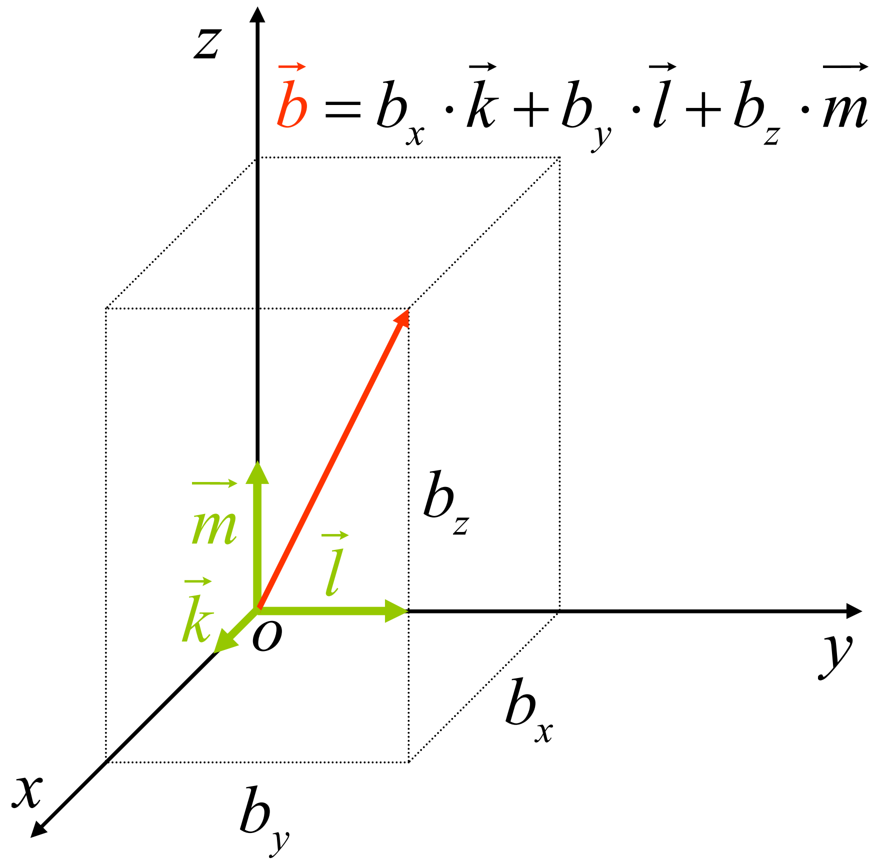
- Komponentendarstellung
- Betrag
- Skalarmultiplikation
- Addition und Subtraktion
- Ortsvektor eines Punkts
- Vektor durch zwei Punkte
- Skalarprodukt
- Anwendung des Skalarprodukts

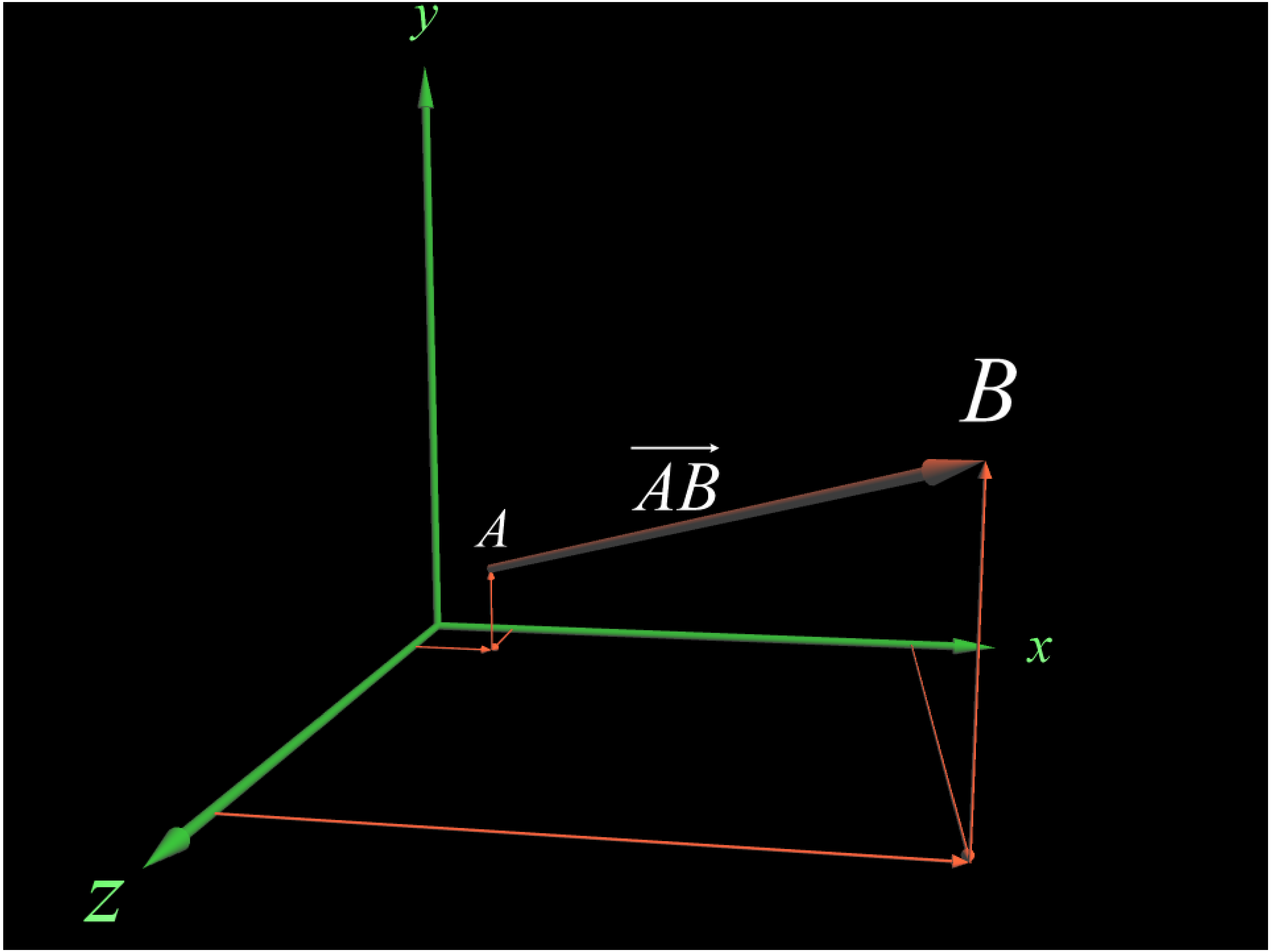
Komponentendarstellung

Ist $\left\{\vec{i};\vec{j}\right\}$ eine in Origo beginnende Basis für die Vektoren einer Ebene und lässt sich ein Vektor $\vec{a}$ in der Form $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}$ darstellen, so bezeichnet man die Faktoren a_x und a_y als Koordinaten des Vektors $\vec{a}$ bezüglich der Basis $\left\{\vec{i};\vec{j}\right\}$. Diese Koordinaten werden mit Hilfe einer einspaltigen und zweizeiligen Matrix dargestellt: $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$. Die Ausdrücke $a_x\cdot\vec{i}$ und $a_y\cdot\vec{j}$ werden als Komponenten von Vektor $\vec{a}$ bezeichnet. Weiterhin gilt die Komponentendarstellung auch für Vektoren in n-dimensionalen Räumen. Im Allgemeinen werden Vektoren für eine Basis gewählt, die folgende Eigenschaften aufweisen: $\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=1 \quad \wedge \quad \angle\left(\vec{i};\vec{j}\right)=90°$. Sie bildet somit ein von Origo ausgehendes orthonormiertes Koordinatensystem (Rechtssystem).

Abbildungen zur Komponentendarstellung im zwei- und drei-dimensionalen Raum:







y
x
Z
A
B
$\overrightarrow{AB}$

Komponentendarstellung für zwei-, drei- und n-dimensionalen Raum:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

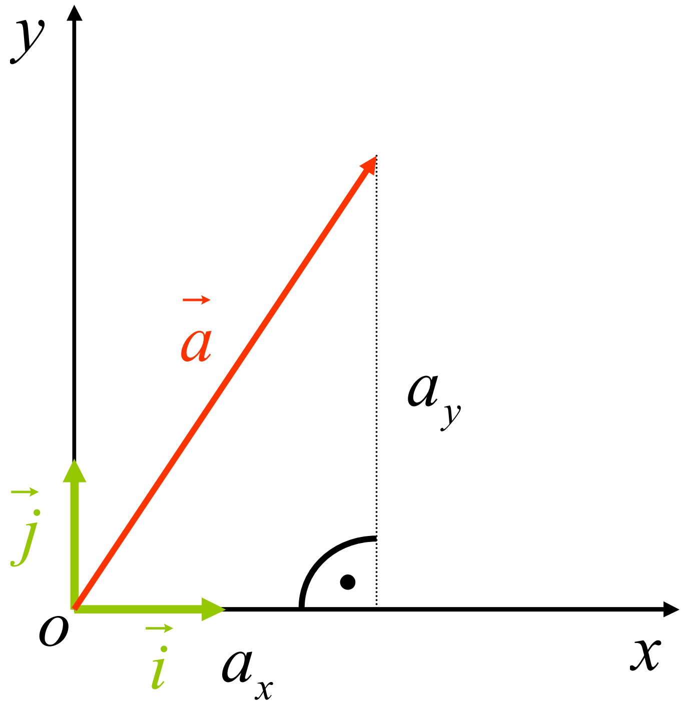
$$\vec{b} = b_x \cdot \vec{k} + b_y \cdot \vec{l} + b_z \cdot \vec{m} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \vec{v_i} = c_1 \cdot \vec{v_1} + c_2 \cdot \vec{v_2} + \ldots + c_n \cdot \vec{v_n} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \in V_2 \wedge \vec{i}, \vec{j} \in V_2 \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge \vec{b} \in V_3 \wedge \vec{k}, \vec{l}, \vec{m} \in V_3 \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge \vec{c} \in V_n \wedge \vec{v_i} \in V_n \setminus \left\{\vec{o}\right\}$$
$$\wedge a_x, a_y, b_x, b_y, b_z, c_i \in \mathbb{R}$$

Betrag

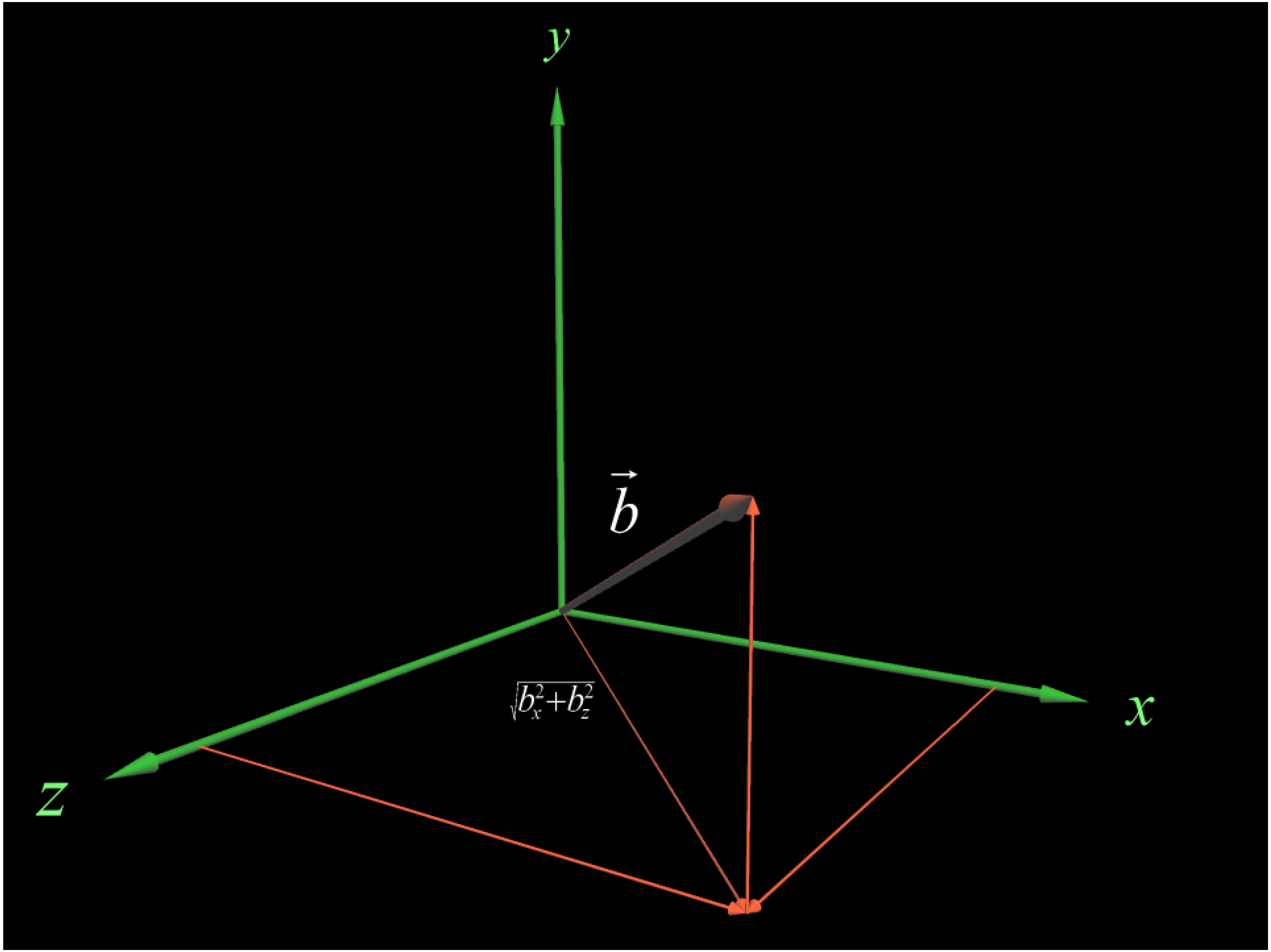
Der Betrag eines Vektor kann mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatz berechnet werden.



$$\left|\vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

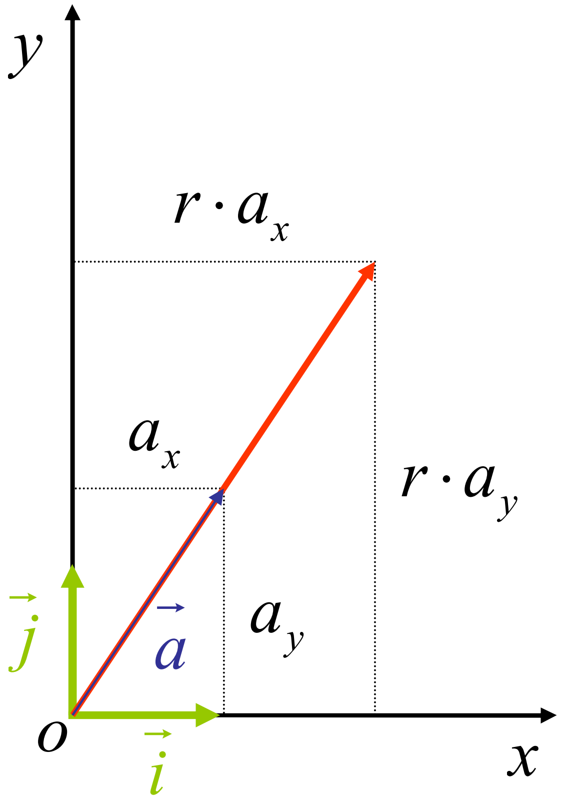
$$\left|\vec{b}\right| = \left|\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}\right| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}$$


y
$\vec{b}$
$\sqrt{b_x^2+b_z^2}$
x
z

Skalarmultiplikation

Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl skaliert, indem jede Komponente des Vektors mit diesem Skalar multipliziert wird.



$$r \cdot \vec{a} = r \cdot a_x \cdot \vec{i} + r \cdot a_y \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} r \cdot a_x \\ r \cdot a_y \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \vec{b} = r \cdot b_x \cdot \vec{k} + r \cdot b_y \cdot \vec{l} + r \cdot b_z \cdot \vec{m} = \begin{pmatrix} r \cdot b_x \\ r \cdot b_y \\ r \cdot b_z \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \vec{c} = \sum_{i=1}^{n} r \cdot c_i \cdot \vec{v_i} = \begin{pmatrix} r \cdot c_1 \\ \vdots \\ r \cdot c_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \in V_2 \wedge \vec{b} \in V_3 \wedge \vec{c} \in V_n \wedge r \in \mathbb{R}$$

Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sich der eine Vektor durch die Multiplikation mit einem Skalar über den anderen Vektor ausdrücken lässt. Linear unabhängig sind zwei Vektoren genau dann, wenn der genannte Fall nicht zu trifft:

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ $\left(\vec{a},\vec{b}\in V_n\right)$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow$ es existiert ein $r\in\mathbb{R}$ mit $r\cdot\vec{a}=\vec{b}$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ $\left(\vec{a},\vec{b}\in V_n\right)$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $r\cdot\vec{a}\neq\vec{b}$ für jedes $r\in\mathbb{R}$

$$\vec{b}=r\cdot\vec{a}\quad \vec{a},\vec{b}\in V_2\wedge r\in\mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cdot a_x \\ r\cdot a_y \end{pmatrix}$$

$$b_x=r\cdot a_x;\quad b_y=r\cdot a_y$$

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}\quad\Rightarrow\quad \text{linear abhängig}$$

$$\frac{b_x}{a_x}\neq\frac{b_y}{a_y}\quad\Rightarrow\quad \text{linear unabhängig}$$

$$\vec{d}=r\cdot\vec{c}\quad \vec{c},\vec{d}\in V_3\wedge r\in\mathbb{R}$$

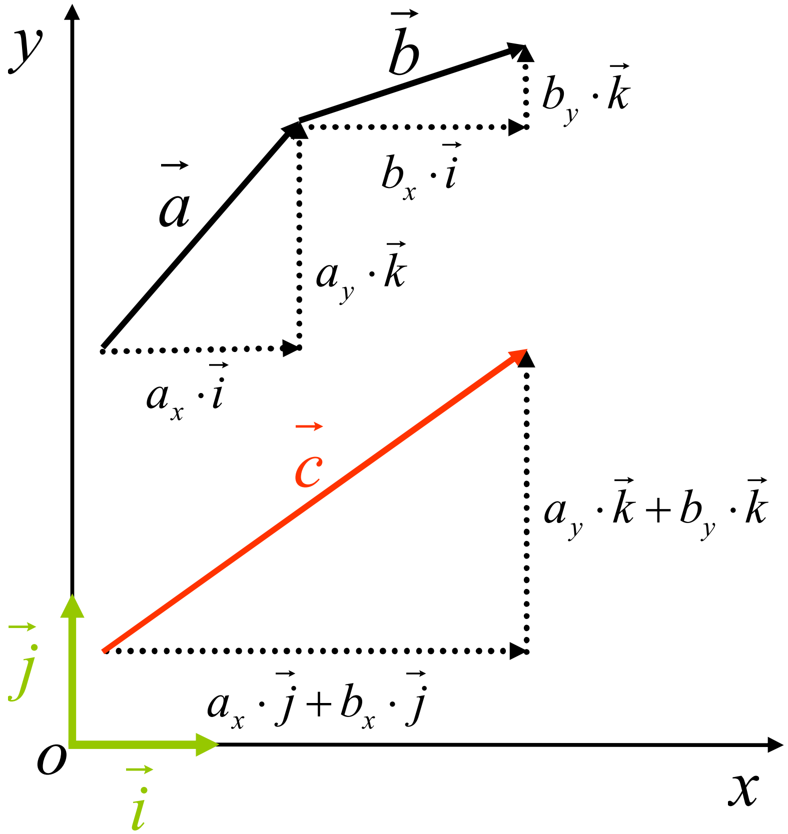
$$\frac{d_x}{c_x}=\frac{d_y}{c_y}=\frac{d_z}{c_z}\quad\Rightarrow\quad \text{l. a.}$$

$$\vec{f}=r\cdot\vec{e}\quad \vec{e},\vec{f}\in V_n\wedge r\in\mathbb{R}$$

$$\frac{e_1}{f_1}=\cdots=\frac{e_n}{f_n}\quad\Rightarrow\quad \text{l. a.}$$

Addition und Subtraktion

Vektoren werden miteinander addiert/subtrahiert, indem die Komponenten der einzelnen Vektoren miteinander addiert/subtrahiert werden.



$$\begin{aligned}
\vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} \\
&= \left(a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}\right) + \left(b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}\right) \\
&= \left(a_x + b_x\right) \cdot \vec{i} + \left(a_y + b_y\right) \cdot \vec{j} \\
&= \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

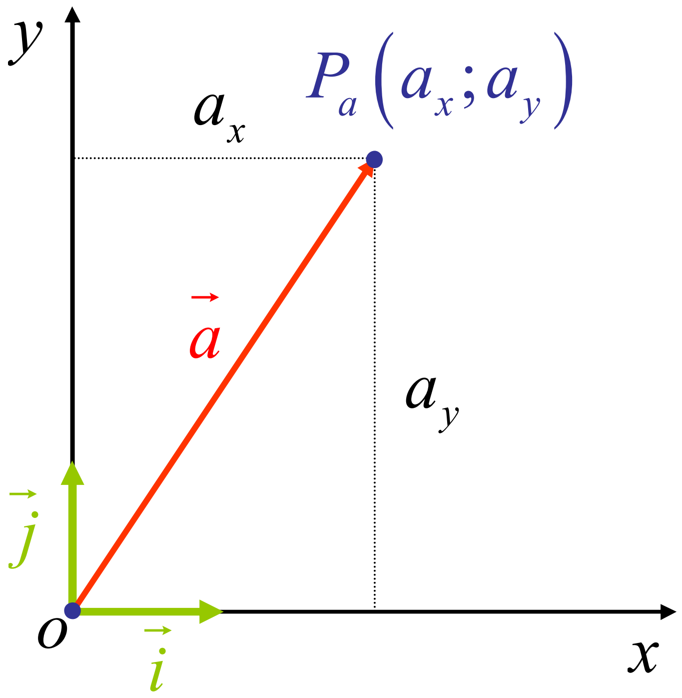
Addition und Subtraktion für zwei-, drei- und n-dimensionalen Raum:

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \end{pmatrix} \\[2ex] \vec{d} \pm \vec{e} = \begin{pmatrix} d_x \pm e_x \\ d_y \pm e_y \\ d_z \pm e_z \end{pmatrix} \\[2ex] \vec{f} \pm \vec{g} = \begin{pmatrix} f_1 \pm g_1 \\ \vdots \\ f_n \pm g_n \end{pmatrix}\end{array}}$$

$$\boxed{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_2 \wedge \vec{d}, \vec{e} \in V_3 \wedge \vec{f}, \vec{g} \in V_n}$$

Ortsvektor eines Punkts

Der Ortsvektor eines Punkts P ist derjenige, welcher durch Origo (Anfangspunkt) und den Punkt selbst (Endpunkt) verläuft.



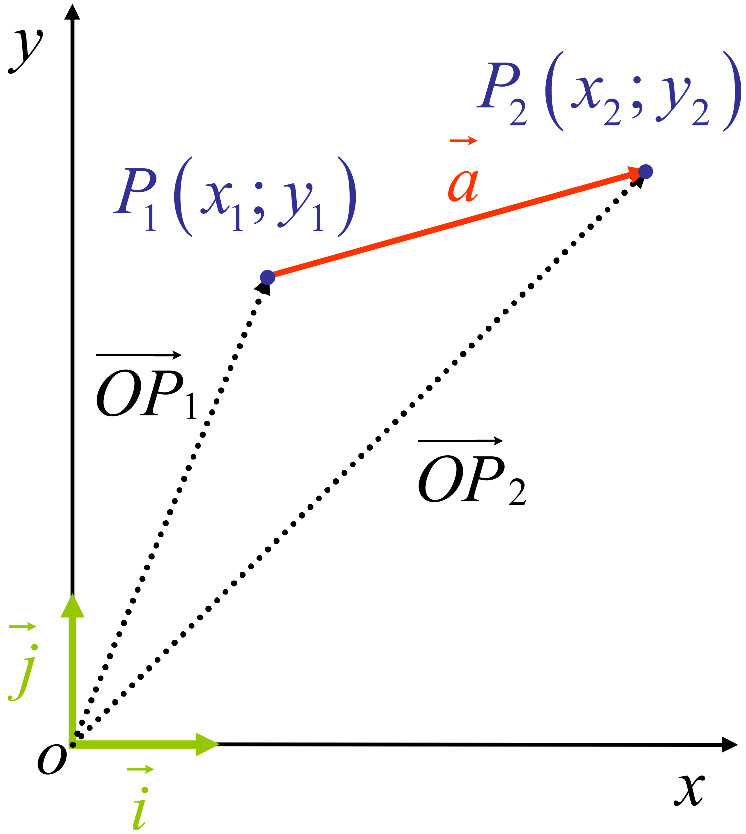
$$\vec{a} = \overrightarrow{OP_a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{OP_b} = b_x \cdot \vec{k} + b_y \cdot \vec{l} + b_z \cdot \vec{m} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{OP_c} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \vec{v_i} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Vektor durch zwei Punkte

Der Vektor, durch zwei Punkte verläuft, ergibt sich aus dem Differenzvektor der Ortsvektoren der beiden Punkte.



$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

$$= (x_2 - x_1)\cdot\vec{i} + (y_2 - y_1)\cdot\vec{j}$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{P_3P_4} = \begin{pmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \\ z_4 - z_3 \end{pmatrix}$$

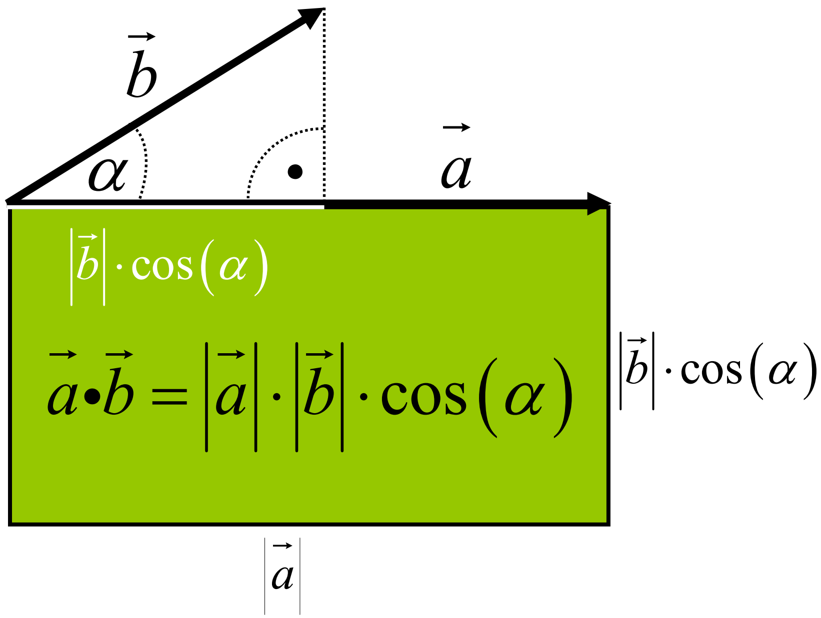
$$\vec{c} = \overrightarrow{P_5P_6} = \begin{pmatrix} x_{1_{P_6}} - x_{1_{P_5}} \\ \vdots \\ x_{n_{P_6}} - x_{n_{P_5}} \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

Aus dem Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt sich immer eine reelle Zahl:

$$r = \vec{a} \bullet \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right)\right) \quad \vec{a},\vec{b} \in V_n \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge r \in \mathbb{R}$$

Das Skalarprodukt ist, geometrisch interpretiert, der Flächeninhalt des Rechtecks mit der Seite $a=\left|\vec{a}\right|$ und der Länge der senkrechten Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$:



Stehen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander, so ist $\cos(\alpha)=\cos\left(90^\circ\right)=0$ und somit auch das Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

Ein Vektor wird mit Hilfe des Skalarprodukts quadriert:

$$\left(\vec{a}\right)^2=\vec{a}\bullet\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\left(0^\circ\right)=\left|\vec{a}\right|^2$$

Rechenregeln des Skalarprodukts:

<u>Kommutativgesetz:</u>

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{b}\bullet\vec{a}$$

Gemischtes
Assoziativgesetz:

$$r \cdot \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) = \vec{b} \bullet \left(r \cdot \vec{a}\right) = \vec{a} \bullet \left(r \cdot \vec{b}\right)$$

Distributivgesetz:

$$\vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$$

Das Skalarprodukt kann auch über Komponenten ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \bullet \vec{b} &= \left(a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}\right) \bullet \left(b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}\right) \\
&= \left(a_x \cdot b_x \cdot \vec{i} \bullet \vec{i}\right) + \left(a_x \cdot b_y \cdot \vec{i} \bullet \vec{j}\right) + \left(a_y \cdot b_x \cdot \vec{j} \bullet \vec{i}\right) + \left(a_y \cdot b_y \cdot \vec{j} \bullet \vec{j}\right) \\
&= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y
\end{aligned}$$

Skalarprodukt für zwei-, drei- und n-dimensionalen Raum:

$$r_1 = \vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

$$r_2 = \vec{c} \bullet \vec{d} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = c_x \cdot d_x + c_y \cdot d_y + c_z \cdot d_z$$

$$r_3 = \vec{e} \bullet \vec{f} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = e_1 \cdot f_1 + \cdots + e_n \cdot f_n$$

$$\vec{a}, \vec{b} \in V_2 \setminus \left\{ \vec{o} \right\} \wedge \vec{c}, \vec{d} \in V_3 \setminus \left\{ \vec{o} \right\} \wedge \vec{e}, \vec{f} \in V_n \setminus \left\{ \vec{o} \right\} \wedge r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$$

Anwendung des Skalarprodukts

Mit dem Skalarprodukt kann der Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmt werden:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\alpha) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}\right)$$

$$\vec{c} \bullet \vec{d} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \arccos\left(\frac{\vec{c} \bullet \vec{d}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}\right)$$

$$\vec{a}, \vec{b} \in V_2 \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge \vec{c}, \vec{d} \in V_n \setminus \left\{\vec{o}\right\}$$

Mit Hilfe des Skalarprodukts ist es möglich den Betrag von Vektoren zu errechnen:

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = \left(\vec{a}\right)^2 = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\left(0^\circ\right) = a_x \cdot a_x + a_y \cdot a_y$$

$$= \left|\vec{a}\right|^2 = a_x^2 + a_y^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\left(\vec{b}\right)^2 = \left|\vec{b}\right|^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{\vec{b} \bullet \vec{b}} = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

$$\left(\vec{c}\right)^2 = \left|\vec{c}\right|^2 = c_1^2 + \cdots + c_n^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{c}\right| = \sqrt{\vec{c} \bullet \vec{c}} = \sqrt{c_1^2 + \cdots + c_n^2}$$

$$\vec{a} \in V_2 \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge \vec{b} \in V_3 \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge \vec{c} \in V_n \setminus \left\{\vec{o}\right\}$$

Geradengleichungen

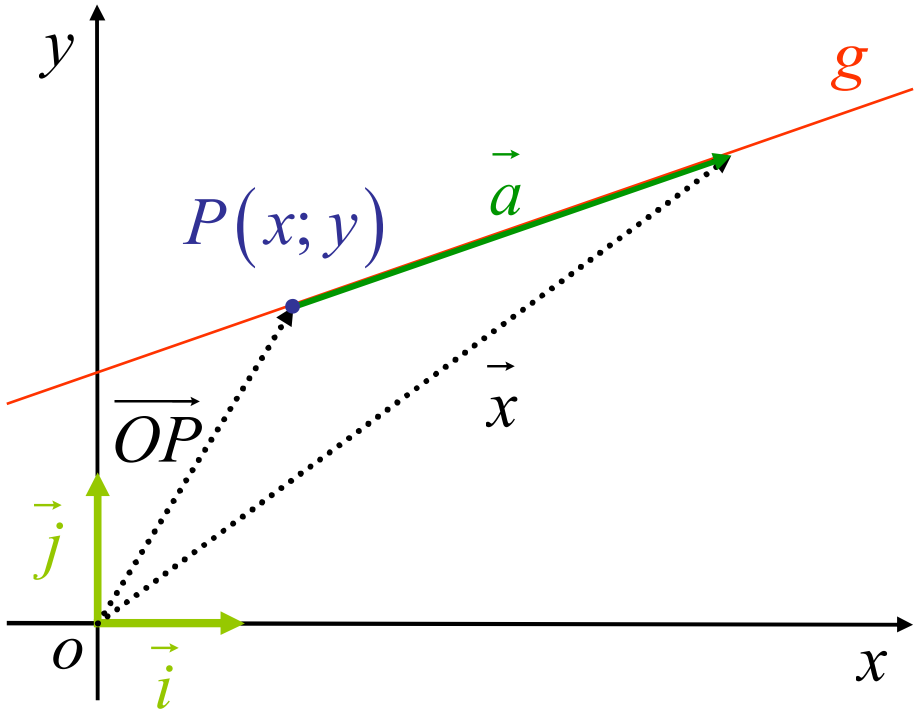
Inhalt

- Punktrichtungsgleichung
- Zweipunktegleichung
- Lagebeziehungen

Punktrichtungsgleichung

Eine Gerade g, welche durch einen Trägerpunkt P verläuft und durch einen Richtungsvektor a bestimmt wird, kann wie folgt beschrieben werden:

$$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a} \qquad \vec{x}, \overrightarrow{OP} \in V_n \wedge \vec{a} \in V_n \setminus \left\{ \vec{o} \right\} \wedge t \in \mathbb{R}$$



Punktrichtungsgleichung für zwei-, drei- und n-dimensionalen Raum:

$$\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{a_1} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{1_x} \\ x_{1_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1_x} \\ P_{1_y} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_{1_x} \\ a_{1_y} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{OP_1} \in V_2$$

$$\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{OP_2} + t \cdot \overrightarrow{a_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{2_x} \\ x_{2_y} \\ x_{2_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{2_x} \\ P_{2_y} \\ P_{2_z} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_{2_x} \\ a_{2_y} \\ a_{2_z} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{OP_2} \in V_3$$

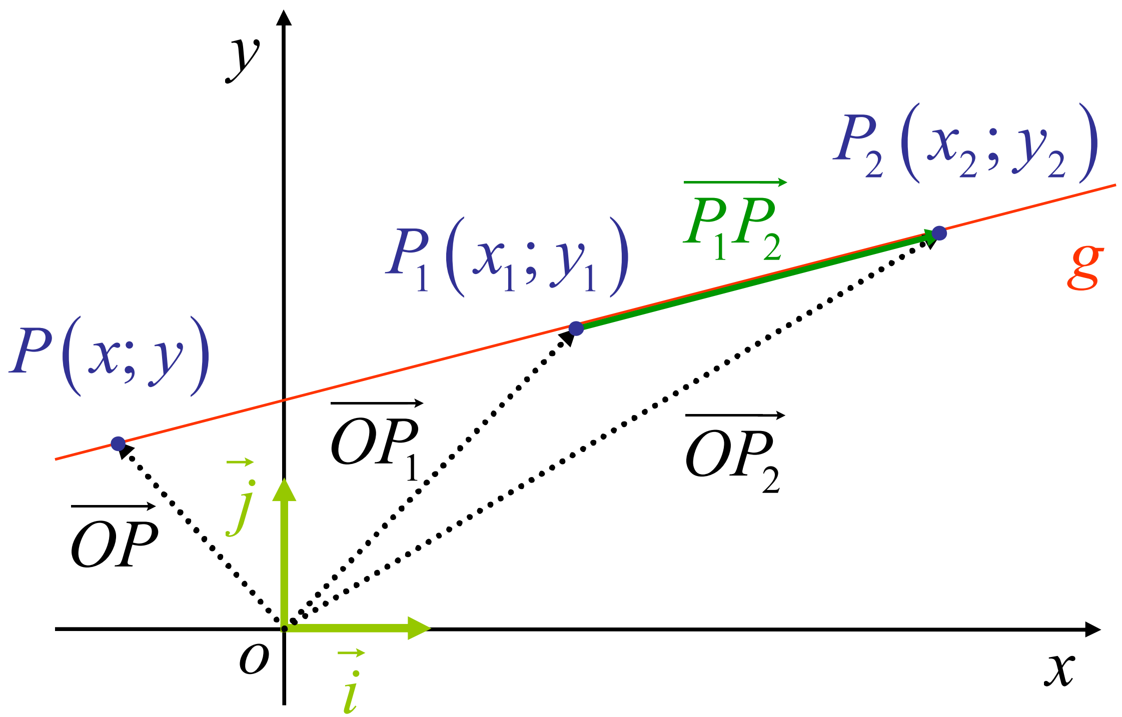
$$\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{OP_3} + t \cdot \overrightarrow{a_3} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{3_1} \\ \vdots \\ x_{3_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{3_1} \\ \vdots \\ P_{3_n} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_{3_1} \\ \vdots \\ a_{3_n} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{OP_3} \in V_n$$

$$\overrightarrow{a_1} \in V_2 \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge \overrightarrow{a_2} \in V_3 \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge \overrightarrow{a_3} \in V_n \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge t \in \mathbb{R}$$

Zweipunktegleichung

Eine Gerade g, welche durch einen Trägerpunkt P und zwei weiteren Punkten verläuft, kann wie folgt beschrieben werden:

$$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \qquad \vec{x}, \overrightarrow{OP} \in V_n \wedge \overrightarrow{P_1P_2} \in V_n \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge t \in \mathbb{R}$$



Zweipunktegleichung für zwei-, drei- und n-dimensionalen Raum:

$$\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{P_{1_1}P_{1_2}} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{1_x} \\ x_{1_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1_x} \\ P_{1_y} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} P_{1_{2_x}} - P_{1_{1_x}} \\ P_{1_{2_y}} - P_{1_{1_y}} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{OP_1} \in V_2$$

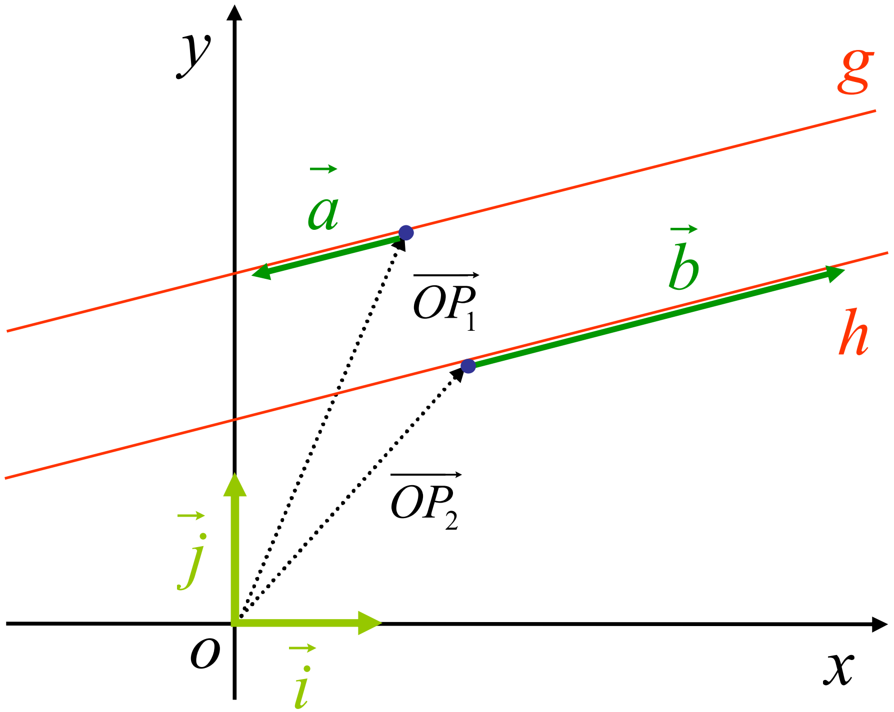
$$\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{OP_2} + t \cdot \overrightarrow{P_{2_1}P_{2_2}} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{2_x} \\ x_{2_y} \\ x_{2_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{2_x} \\ P_{2_y} \\ P_{2_z} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} P_{2_{2_x}} - P_{2_{1_x}} \\ P_{2_{2_y}} - P_{2_{1_y}} \\ P_{2_{2_z}} - P_{2_{1_z}} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{OP_2} \in V_3$$

$$\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{OP_3} + t \cdot \overrightarrow{P_{3_1}P_{3_2}} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{3_1} \\ \vdots \\ x_{3_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{3_1} \\ \vdots \\ P_{3_n} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} P_{3_{2_1}} - P_{3_{1_1}} \\ \vdots \\ P_{3_{2_n}} - P_{3_{1_n}} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{OP_3} \in V_n$$

$$\overrightarrow{P_{1_1}P_{1_2}} \in V_2 \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge \overrightarrow{P_{2_1}P_{2_2}} \in V_3 \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge \overrightarrow{P_{3_1}P_{3_2}} \in V_n \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge t \in \mathbb{R}$$

Lagebeziehungen

Zwei Geraden g und h liegen parallel zu einander, wenn die Richtungsvektoren der Geraden linear abhängig sind:



$$g: \quad \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \vec{a}$$

$$h: \quad \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{OP_2} + r \cdot \vec{b}$$

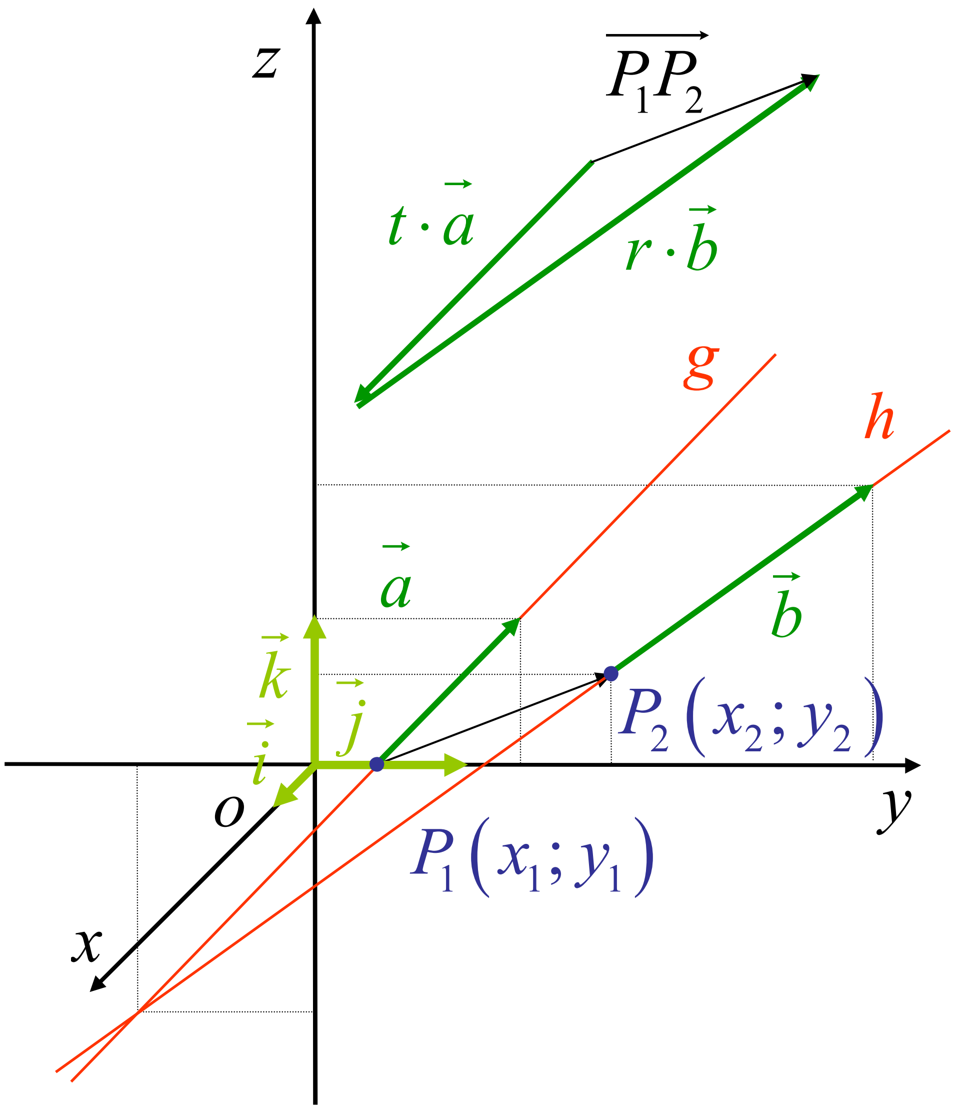
$$\vec{b} = s \cdot \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2} \in V_n$$

$$\wedge \vec{a}, \vec{b} \in V_n \setminus \left\{ \vec{o} \right\}$$

$$\wedge t, r, s \in \mathbb{R}$$

Zwei Geraden befinden sich in einer Ebene, wenn die beiden Richtungsvektoren und der Differenzvektor der beiden Trägerpunkte komplanar sind:



$$g: \quad \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{OP_1} + s \cdot \vec{a}$$

$$h: \quad \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{OP_2} + k \cdot \vec{b}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = t \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{P_1P_2} \text{ Komp.}$$

$$\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2} \in V_n$$

$$\wedge \vec{a}, \vec{b} \in V_n \setminus \left\{\vec{o}\right\}$$

$$\wedge s, k, t, r \in \mathbb{R}$$

Zwei Geraden in einer Ebene liegen für drei- und n-dimensionalen Raum:

$$\overrightarrow{P_{1_1}P_{1_2}} = t \cdot \overrightarrow{a_1} + r \cdot \overrightarrow{b_1}$$

$$\begin{pmatrix} P_{1_x} \\ P_{1_y} \\ P_{1_z} \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a_{1_x} \\ a_{1_y} \\ a_{1_z} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_{1_x} \\ b_{1_y} \\ b_{1_z} \end{pmatrix}$$

$$P_{1_x} = t \cdot a_{1_x} + r \cdot b_{1_x}$$

$$P_{1_y} = t \cdot a_{1_y} + r \cdot b_{1_y}$$

$$P_{1_z} = t \cdot a_{1_z} + r \cdot b_{1_z}$$

$$\overrightarrow{P_{2_1}P_{2_2}} = t \cdot \overrightarrow{a_2} + r \cdot \overrightarrow{b_2}$$

$$\begin{pmatrix} P_{2_1} \\ \vdots \\ P_{2_n} \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a_{2_1} \\ \vdots \\ a_{2_n} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_{2_1} \\ \vdots \\ b_{2_n} \end{pmatrix}$$

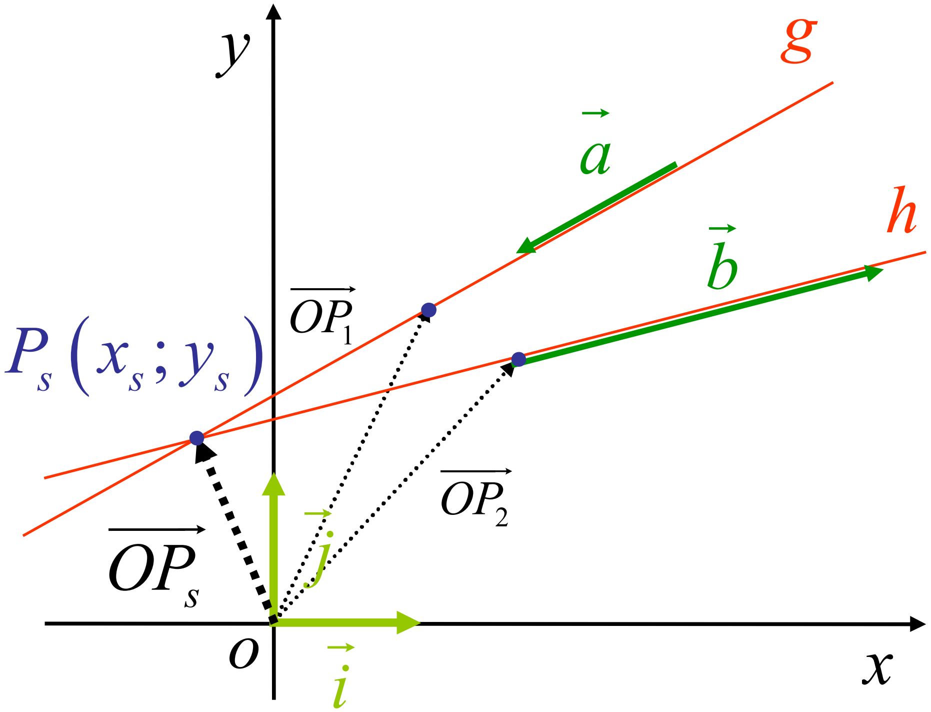
$$P_{2_1} = t \cdot a_{2_1} + r \cdot b_{2_1}$$

$$\vdots$$

$$P_{2_n} = t \cdot a_{2_n} + r \cdot b_{2_n}$$

$$\overrightarrow{P_{1_1}P_{1_2}}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b_1} \in V_3 \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge \overrightarrow{P_{2_1}P_{2_2}}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_2} \in V_n \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge t, r \in \mathbb{R}$$

Geraden, welche komplanar und linear unabhängig sind, schneiden sich in genau einem Punkt. Es gibt allerdings auch Geraden, die deckungsgleich (Richtungsvektoren sind dann linear abhängig) sind und somit unendlich viele Schnittpunkte haben:



$$g: \quad \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \vec{a}$$

$$h: \quad \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{OP_2} + r \cdot \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OP_s} = \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$$

$$\overrightarrow{OP_s} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \vec{a} = \overrightarrow{OP_2} + r \cdot \vec{b}$$

$$\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2} \in V_n$$

$$\wedge \vec{a}, \vec{b} \in V_n \setminus \left\{ \vec{o} \right\}$$

$$\wedge t, r \in \mathbb{R}$$

Schnittpunkt zweier Geraden für zwei-, drei- und n-dimensionalen Raum:

$$\overrightarrow{OP_{1_s}} = \overrightarrow{OP_{1_1}} + t \cdot \overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{OP_{1_2}} + r \cdot \overrightarrow{b_1}$$

$$\begin{pmatrix} x_{1_s} \\ y_{1_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1_{1x}} \\ P_{1_{1y}} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_{1_x} \\ a_{1_y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{1_{2x}} \\ P_{1_{2y}} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_{1_x} \\ b_{1_y} \end{pmatrix}$$

$$P_{1_{1x}} + t \cdot a_{1_x} = P_{1_{2x}} + r \cdot b_{1_x}$$

$$P_{1_{1y}} + t \cdot a_{1_y} = P_{1_{2y}} + r \cdot b_{1_y}$$

$$\overrightarrow{OP_{2_s}} = \overrightarrow{OP_{2_1}} + t \cdot \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{OP_{2_2}} + r \cdot \overrightarrow{b_2}$$

$$P_{2_{1x}} + t \cdot a_{2_x} = P_{2_{2x}} + r \cdot b_{2_x}$$

$$P_{2_{1y}} + t \cdot a_{2_y} = P_{2_{2y}} + r \cdot b_{2_y}$$

$$P_{2_{1z}} + t \cdot a_{2_z} = P_{2_{2z}} + r \cdot b_{2_z}$$

$$\overrightarrow{OP_{3_s}} = \overrightarrow{OP_{3_1}} + t \cdot \overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{OP_{3_2}} + r \cdot \overrightarrow{b_3}$$

$$P_{3_{11}} + t \cdot a_{3_1} = P_{3_{21}} + r \cdot b_{3_1}$$

$$\vdots$$

$$P_{3_{1n}} + t \cdot a_{3_n} = P_{3_{2n}} + r \cdot b_{3_n}$$

$$\overrightarrow{OP_{1_s}}, \overrightarrow{OP_{1_1}}, \overrightarrow{OP_{1_2}} \in V_2 \wedge \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b_1} \in V_2 \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge \overrightarrow{OP_{2_s}}, \overrightarrow{OP_{2_1}}, \overrightarrow{OP_{2_2}} \in V_3$$

$$\wedge \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_2} \in V_3 \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge \overrightarrow{OP_{3_s}}, \overrightarrow{OP_{3_1}}, \overrightarrow{OP_{3_2}} \in V_n \wedge \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{b_3} \in V_n \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge t, r \in \mathbb{R}$$

Zwei Geraden werden dann als Windschief bezeichnet, wenn die beiden Richtungsvektoren (linear unabhängig) und der Differenzvektor der Trägerpunkte nicht komplanar sind:

$$g: \quad \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \vec{a}$$
$$h: \quad \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{OP_2} + r \cdot \vec{b}$$

$$\vec{b} \neq s \cdot \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \text{l.u.}$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} \neq t \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{P_1P_2} \text{ nicht Komp.}$$

$$\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2} \in V_n \wedge \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b} \in V_n \setminus \left\{\vec{o}\right\} \wedge s, t, r \in \mathbb{R}$$